ALGEBRA M1 – LISTA 1

Liczby zespolone

1. Obliczyć, sprowadzając do postaci $a + ib$:

$$(a)\ (1+i)(2-3i), \quad (b)\ (-6+5i)+(2-4i), \quad (c)\ (-5+\sqrt{2}i)-(2-i)$$

$$(d)\ (1+i)(2-i)(3+2i), \quad (e)\ (1-2i)^3, \quad (f)\ (1+i)^4, \quad (g)\ (-2i)^6,$$

$$(h)\ \frac{1+2i}{2-3i}, \quad (i)\ \frac{2-\sqrt{2}i}{2+\sqrt{3}i}, \quad (j)\ \frac{1+3i}{3+4i}+\frac{1-4i}{3-4i}, \quad (k)\ 2-3i+\frac{1-2i}{i+2}$$

2. Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną każdej z podanych liczb:

$$(a)\ 2+3i+\frac{1}{2+3i}, \qquad (b)\ \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}-\frac{(1-i)^2}{(1+i)^3}$$

3. Rozwiązać każde z podanych równań dla rzeczywistych x, y:

$$(a)\ (1+i)x+(1-2i)y = 1-i, \quad (b)\ \frac{x-3}{1+i}+\frac{y+3}{1-i} = 1+i,$$

$$(c)\ x^2+iy^2 = 1+2i, \quad (d)\ x^2-iy^2 = 1+i.$$

4. Rozwiązać każde z podanych równań dla zespolonych z:

$$(a)\ z^2 = i, \quad (b)\ z^2 = -i, \quad (c)\ 4+2i = (1+i)z,$$

$$(d)\ z^2+4i = 0, \quad (e)\ \frac{z+2}{i-1} = \frac{3z+i}{2+i}, \quad (f)\ z^2-6z+10 = 0.$$

5. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające podany warunek:

$$(a)\ \mathrm{Re}z - 3\mathrm{Im}z = 2, \quad (b)\ \mathrm{Re}(iz) \geq 1, \quad (c)\ \mathrm{Im}(iz) \leq 2.$$

6. Definiujemy n-tą potęgę liczby zespolonej z w naturalny sposób, tzn.

$$z^0 = 1, \quad z^n = z^{n-1}\cdot z, \quad z^{-n} = 1/z^n$$

dla $n \geq 1$. Obliczyć i^n dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $(1+i)^n$ dla $n = 1, 2, 3, 4$.

9. Uzasadnić równości

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_1+z_2) &= \mathrm{Re}z_1+\mathrm{Re}z_2 \\ \mathrm{Im}(z_1+z_2) &= \mathrm{Im}z_1+\mathrm{Im}z_2 \\ \mathrm{Re}(iz) &= -\mathrm{Im}z \\ \mathrm{Im}(iz) &= \mathrm{Re}z \end{aligned}$$

10. Wykazać następująe własności operacji sprzężenia liczb zespolonych:
   - (a) $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}z$
   - (b) $z-\overline{z} = 2i\mathrm{Im}z$
   - (c) $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}z$

(d) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
(e) $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
(f) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

11. Rozwiązać każde z równań:

$$(a)\ 2z + (3-i)\overline{z} = 5 + 4i, \quad (b)\ z + i = \overline{z+i}, \quad (c)\ z\overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i,$$

$$(d)\ z + \overline{z} + i(z - \overline{z}) = 5 + 3i, \quad (e)\ i\mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z = 2i - 3, \quad (f)\ \overline{z} = z^2.$$

w ciele liczb zespolonych. Podać interpretację geometryczną zbioru rozwiązań.

13. Wykazać następujące własności modułu liczb zespolonych:
(a) $|\mathrm{Re}z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}z| \leq |z|$
(b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
(c) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
(d) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
(e) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

14. Obliczyć moduły liczb zespolonych

$$2 + 7i, \quad \sin\alpha + i\cos\alpha, \quad \frac{4+i}{3+2i}, \quad (1+\sqrt{2}i)^4, \quad \frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2}+2i)^3}$$

15. Pokazać, że jeżeli $z_2 \neq 0$ oraz $z_0 \neq 0$, to zachodzi prawo skracania

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_0}{z_2 \cdot z_0}$$

dla każdego $z_1 \in \mathbb{C}$.

16. Pokazać, że jeżeli $z_2 \neq 0$ oraz $z_4 \neq 0$, to zachodzą wzory

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_2 z_4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

17. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ będą różne, niezerowe i takie, że $|a| = |b| = |c|$. Pokazać, że jeżeli pierwiastek równania $az^2 + bz + c = 0$ ma moduł równy jeden, to $b^2 = ac$.

Romuald Lenczewski